École Centrale Méditerranée

Johns Hopkins University

Entropy methods for Porous Medium Equation

S8 en stage à l'international

Maître de stage : M.Yannick SIRE
Tuteur école : Mme.Magali TOURNUS

ATTIÉ Jean-Baptiste
Du 23 Février au 14 Août 2024

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à M. Yannick Sire pour m'avoir donné l'opportunité de réaliser ce stage à Baltimore. Tout au long de cette expérience, j'ai été guidé avec rigueur grâce à son recul sur les notions abordées.

Je remercie également Mme Magalie Tournus et M. Guillaume Chiavassa pour avoir accepté de juger mon travail.

Enfin, je remercie mes parents pour leur soutien tout au long de mon séjour, sans lesquels rien n'aurait été possible.

Résumé

Français

J'ai effectué ce stage de recherche au département de Mathématiques dans l'université américaine Johns Hopkins University à Baltimore, sous la tutelle du Pr. Sire. Les premières semaines ont été consacrées à la lecture de publications scientifiques.

Le stage portait sur l'étude de l'Équation Fractionnaire des Médias Poreux. Les solutions de cette équation convergent vers une solution stationnaire. Mon objectif était de démontrer que cette convergence se fait avec une vitesse exponentielle, en posant les hypothèses nécessaires.

Dans la première partie de ce rapport, je présenterai le contexte du stage ainsi que ses objectifs. Ensuite, dans une deuxième partie, je détaillerai le développement scientifique réalisé durant cette mission. Enfin, nous aborderons une analyse du stage en termes d'organisation et des compétences acquises au cours de ce projet.

Summary

English

I completed this research internship at the Mathematics Department of Johns Hopkins University in Baltimore, under the supervision of Professor Sire. The first few weeks were dedicated to reading scientific publications.

The internship focused on the study of the Fractional Equation of Porous Media. The solutions to this equation converge to a stationary solution. My goal was to demonstrate that this convergence occurs at an exponential rate, while making the necessary assumptions.

In the first part of this report, I will present the context of the internship and its objectives. Then, in the second part, I will delve into the scientific development carried out during this project. Finally, we will discuss an analysis of the internship in terms of organization and the skills acquired throughout this project.

Table des matières

I Contexte et objectifs **5**

1 Johns Hopkins University **6**
1.1 Présentation générale 6
1.2 Département de Mahtématiques de JHU 7

2 Déroulé et Objectifs du stage **8**
2.1 Déroulé du stage 8
2.2 Mission du stage 9

II Développement Scientifique *(english)* **11**

3 Presentation **12**
3.1 The Problem 12
3.2 Qualitative context of the problem 13
3.3 Usefull Results and Properties 14

4 A First Approach **16**
4.1 Proof for the classic equation 16
4.2 Proof for the generalised equation : an attempt 20
4.3 Paths to explore 25

5 An other Approach to the Problem **26**
5.1 Linearized problem with classic Laplacian 26
5.2 Linearized problem with fractionnal Laplacian) 28

III Analyse du Stage **30**

6 Organisation **31**

7 Compétences Développées à travers les contraintes du projet **33**

8 Retour d'Expérience et Apport Personnel **35**

Première partie

Contexte et objectifs

Chapitre 1

Johns Hopkins University

1.1 Présentation générale

Johns Hopkins University est une université Amerciaine privée située à Baltimore dans le Maryland, elle a été fondée en 1870. Elle porte de nom de John Hopkins : il avait à l'époque financé la moitié de Johns Hopkins Hospital.

L'université est répartie en 10 divisions allant des sciences à la musique, elle est en particulier célèbre pour sa division School of Medicine. L'université compte aujourd'hui 39 Prix Nobels et une Medaille Fields.

Le campus principal est situé au nord de Baltimore, d'autres campus sont situés dans la ville, notament un lié au Johns Hopkins Hospital. Avec plus de 25 000 étudiants en 2019, l'université est dirigée par Ronald.J.Daniels.



Une entrée du campus de JHU

1.2 Département de Mahtématiques de JHU

Le département de Mathématiques fait partie de la division *Krieger School of Art and Science* de l'université. Il est fondé en 1886 par J.J. Sylvester, qui est un acteur majeur dans la recherche en mathématiques aux États-Unis, connu notamment pour la création de l'American Journal of Mathematics, la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère occidental. Ce département rassemble professeurs, postdoctorants, étudiants de masters et mathématiciens invités.

Son secteur d'activité se situe autour des domaines des équations aux dérivées partielles, l'analyse, la topologie, la géométrie différentielle, la théorie des nombres et la physique mathématique.

Des séminaires ont lieu régulièrement, toutes les semaines avaient lieu un séminaire d'analyse auquel j'assistai, suivie d'un dîner. Le moment le plus important de la semaine pour le département reste le *wine and cheese*, moment où tout le monde se réunit autour d'un apéritif chaque Jeudi après-midi.



Campus de JHU, le département de Mathématiques est sur la gauche de la photo

JOHNS HOPKINS
KRIEGER SCHOOL
of ARTS & SCIENCES

Chapitre 2

Déroulé et Objectifs du stage

2.1 Déroulé du stage

Je suis arrivé au département de Mathématiques le 26 Février. Je travaillais dans un grand bureau avec une dizaine d'élèves de master et un postdoctorant. La salle était munie de grands tableaux à craie tout le long.

En parallèle de mes travaux j'ai pu assister à plusieurs séminaires d'analyse et de géométrie. Il y en avait un par semaine. J'ai aussi eu l'opportunité d'assister à un cours donné par un postdoctorants à destination des graduate students, pendant plusieurs semaines. Celui-ci portait sur la *Théorie des semis-groupes*.

Au début du stage le Pr. Sire m'a donné des documents à lire :
- Un article faisant l'état des lieux sur la théorie de la diffusion en mathématiques [1] pour me cultiver sur le sujet.
- Un papier concernant les théorèmes d'existence, d'unicité et comportement asymptotique de l'équation étudiée [2]

Il m'a ensuite posé le problème qui fait l'objet de ce rapport. Durant le stage, je me suis entretenu avec le Pr. Sire 1 à 2 fois par semaine. Entre deux entrevues, j'étudiais les pistes qu'il me donnait. Je testais des idées sur mon tableau à craies. J'écrivais mon cheminement sur une feuille pour ne pas perdre mon fil car à chaque problème rencontré dans mon travail, il y avait beaucoup de direction possibles. J'ai eu à lire plusieurs autres papiers au cours de mes recherches.

Une fois les recherches bien avancées, il m'a proposé de commencer à rédiger ce que j'avais fait, et j'ai appris à prendre en main Latex.

2.2 Mission du stage

Dans de nombreux domaines scientifiques tels que la physique, l'ingénierie et même les marchés financiers, la diffusion de substances, d'énergie ou d'information est une problématique centrale. Les modèles mathématiques qui décrivent ces processus de diffusion se diversifient pour mieux représenter les phénomènes observés, allant des équations de diffusion classiques aux modèles non linéaires et non locaux.

La diffusion fractionnaire, en particulier, joue un rôle crucial pour représenter les interactions de longue portée et les diffusions anormales observées dans des environnements complexes. Les recherches actuelles visent à améliorer notre compréhension et notre capacité de prédiction dans ces différents contextes.

Nous allons travailler sur une *généralisation* de l'Equation Fractionnaire des Médias Poreux. L'équation *classique* correspond au cas suivant :

$$\partial_t v = -\mathcal{L} v^m + cv$$

L'équation *généralisée* dépend d'une fonction générale φ au lieu la fonction puissance :

$$\partial_t v = -\mathcal{L}\varphi(v) + cv$$

Nous admettrons tous les théorèmes d'existences et d'unicités. Il sera également admis que les solutions v convergent vers la solution stationnaire, notée S .

Le but de ce stage est d'étudier la vitesse de cette convergence. Nous utiliserons des méthodes dîtes *entropiques* afin de prouver que cette convergence a lieu a une vitesse exponentielle.

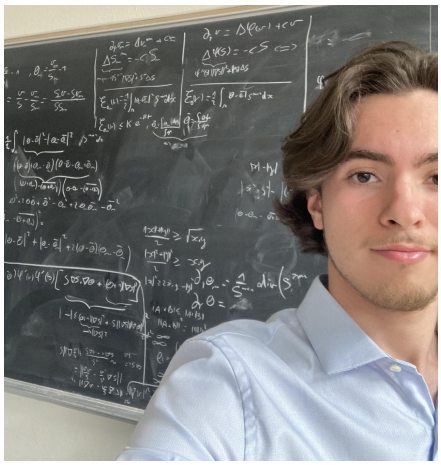
Afin de rendre l'approche réalisable, nous pourrons, suivant les sections du rapport, poser certaines hypothèses simplificatrices telles que :

- Restreindre la généralité de φ,
- Remplacer le Laplacien fractionnaire par le Laplacien classique : $-\mathcal{L} = \Delta$.

La première partie du developpement scientifique servira à présenter le problème et à écrire les principaux théorèmes qui existent déjà ainsi que d'autres petits résultats utiles.

Ensuite, on étudiera la vitesse de convergence des solutions en utilisant l'approche d'une méthode d'entropie. Dans cette section, on fera l'hypothèse de l'opérateur Laplacien $\mathcal{L} = \Delta$. On prouvera le résultat en supposant que φ est une fonction puissance, puis on tentera de refaire la preuve avec une fonction φ plus générale.

En dernière partie du développement scientifique, nous changerons d'approche pour évaluer la vitesse de convergence : l'équation sera linéarisée et nous utiliserons une autre fonction d'entropie.



Un tableau à craie était à ma disposition

Deuxième partie

Développement Scientifique *(english)*

Chapitre 3

Presentation

3.1 The Problem

The goal is to further understand the asymptotic behavior of the following equation's solution :

$$\begin{cases} \partial_t v = -\mathcal{L}\varphi(v) + cv & in\ \mathbb{R}_+^* \times \Omega, \\ v(0,x) = u_0(x) & in\ \Omega, \\ v(t,x) = 0 & in\ \mathbb{R}_+^* \times\ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Where the linear operator $\mathcal{L}$ is a fractional power of the Laplacian : $\mathcal{L}(.) = (-\Delta)^s(.)$ with $s \in]0,1]$. φ is a smooth increasing function whose caracteritics will be built later, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is a bounded domain with smooth boundary, $d \geq 1$ and $c > 0$.

We call S a stationary solution of the equation, which means :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi(S) = cS & in\ \Omega, \\ \partial_t S = 0 & in\ \Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

Assuming the convergence of $v(t,x)$ in its stationary solution $S(x)$ as $t \to +\infty$ uniformly in space, we want to study the quantitative aspect of that convergence (under necessary assumptions), namely we want to obtain a rate of convergence of v to S with an estimate like

$$\|v(t,.) - S\|_X \leq\ a\, e^{-bt}$$

where $a,\ b$ depends only on the initial data (and parameters of the problem) and X is a suitable Hilbert space.

3.2 Qualitative context of the problem

In this section, we give some qualitative insight to better understand the origin of the problem exposed in the previous section.

First, let's give a definition of the fractionnal Laplacian. The fractional Laplacian is a generalization of the classical Laplacian. While the classical Laplacian Δu operates locally, measuring the sum of variations in u in all directions, the fractional Laplacian introduces a non-local component, capturing more complex diffusive effects.

For a fractional order $s \in]0,1[$, the fractional Laplacian of u, denoted by $(-\Delta)^s u$, can be defined in several equivalent ways (see [1]), with the most common being an integral formula :

$$\mathcal{L}u = (-\Delta)^s u(x) = C_{d,s}\,\text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{d+2s}}\,dy,$$

where $C_{n,s}$ is a normalization constant that depends on the dimension n and order s, and P.V. is the principal value.

The problem we study initially comes from this equation :

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{L}(\varphi(u)) = 0 & \text{in } (0,+\infty)\times\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

where φ is a real function we will specify later. The leading example will be $\varphi(u) = |u|^{m-1}u$ with $m > 0$. We know and it is admitted that there exist a unique solution to this problem in a certain class of solution (called H^*-solution, detailed here [2]).

For some reasons, it is useful to introduce the following rescaled problem, using this change of variables :

$$v(t,x) = (1+\tau)^{\frac{1}{m-1}} u(\tau,x), \quad t = \log(1+\tau)$$

which transforms problem into the one we know.

$$\begin{cases} v_t + \mathcal{L}(v^m) = \frac{v}{m-1} & \text{in } (0,+\infty)\times\Omega, \\ v(0,x) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \\ v(t,x) = 0 & \text{for } t>0 \text{ and } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

Then, we have the following results (see [2]) :

Theorem

Let v be any nonnegative H^*-solution of the Problem , then we have (unless $v \equiv 0$)

$$\lim_{t\to\infty} \|v(t,\cdot) - S\|_{L^\infty(\Omega)} = 0,$$

Corollary

Let $m > 1$. For any given constant $c > 0$, there exists a unique weak solution to the elliptic equation

$$\mathcal{L}(S^m) = cS \quad \text{in } \Omega,$$

3.3 Usefull Results and Properties

For more clarity, we present some useful propreties and calculations that will be used along the work.

Properties on ∇, Δ and div

Here are some usefull properties on ∇, Δ and $\nabla\cdot = div$

$$\forall\,(A,B) : \mathbf{R}^d \mapsto \mathbf{R}^d\ ,\quad \bullet\quad \Delta AB = B\Delta A + A\Delta B + 2\nabla A.\nabla B \tag{P1}$$

$$\bullet\quad A\Delta B + \nabla A.\nabla B = \nabla\cdot[A\nabla B] \tag{P2}$$

$$\bullet\quad A\Delta B + 2\nabla A.\nabla B = \frac{1}{A}div(A^2\nabla B) \tag{P3}$$

Integration by Part

Suppose Ω is an open bounded subset of $\mathbf{R}^d$ with a piecewise smooth boundary $\partial\Omega$, $\vec{dn}_{\partial\Omega}$ is the differential outward normal vector to the boundary. For $u : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ *and* $\vec{V} : \Omega \mapsto \mathbf{R}^d$,

$$\int_\Omega u\, div(\vec{V})dx = \int_{\partial\Omega} u\,\vec{V}\cdot\,\vec{dn}_{\partial\Omega}\ - \int_\Omega \nabla u\cdot\vec{V}dx$$

GWPI : general weighted Poincaré inequality

Given m, Ω, there exists a constant $K > 0$ such that for every stationary solution $S > 0$ of the problem, and for every $\theta \in W_0^{1,2}(\Omega, S^{2m}\,dx)$ we have (see [4]) :

$$\int_\Omega S_c^{2m}|\nabla\theta|^2\,dx \geq Kc\int_\Omega S_c^{m+1}|\theta-\bar{\theta}|^2\,dx. \tag{3.3}$$

Usefull Calculations

Here are some usefull asymptotical development, that are used later or could be used for the continuation of the research. Here, $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$, *bijective on* $\mathbf{R}_+$, $\varphi(0) = 0,\ \varphi' > 0,\ \varphi'' > 0,\ \theta, S > 0,\ \alpha = \varphi^{-1}(1) > 0$.

We define

$$K_\varphi(\theta, S) = \frac{\varphi'[\varphi^{-1}(\varphi(\theta+\alpha)\varphi(S))]}{\varphi(S)^2\varphi'(\theta+\alpha)} \quad \textit{and} \quad f_\varphi(\theta, S) = K_\varphi(\theta, S)\varphi(S)\left[\varphi^{-1}(\varphi(\theta+\alpha)\varphi(S)) - S\varphi(\theta+\alpha)\right]$$

Some long calculations give the following results :

- $\varphi(\theta+\alpha) \underset{\theta\to 0}{=} 1 + \ \theta\varphi'(\alpha) + \ \dfrac{\theta^2}{2}\varphi''(\alpha) + \ \mathcal{O}(\theta^3)$
- $\varphi^{-1}(\varphi(\theta+\alpha)\varphi(S)) \underset{\theta\to 0}{=} S + \ \theta\,\dfrac{\varphi(S)\varphi'(\alpha)}{\varphi'(S)} + \ \dfrac{\theta^2}{2}\,\dfrac{\varphi(S)}{\varphi'(S)}[\varphi''(\alpha) - \dfrac{\varphi(S)\varphi''(S)\varphi'(\alpha)^2}{\varphi'(S)^2}] + \ \mathcal{O}(\theta^3)$
- $K_\varphi(\theta, S) \underset{\theta\to 0}{=} \dfrac{\varphi'(S)}{\varphi(S)^2\varphi'(\alpha)} + \theta\dfrac{1}{\varphi(S)}[\dfrac{\varphi''(S)}{\varphi'(S)} - \dfrac{\varphi'(S)\varphi''(\alpha)}{\varphi(S)\varphi'(\alpha)^2}] + \mathcal{O}(\theta^2)$

- $f_\varphi(\theta, S) \underset{\theta\to 0}{=} \ \theta \cdot \dfrac{1}{\varphi(S)}(1 - S\dfrac{\varphi'(S)}{\varphi(S)})$
  $+ \ \dfrac{\theta^2}{2} \cdot \dfrac{1}{\varphi(S)}\ [\ \dfrac{\varphi''(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}(1 - \dfrac{2}{\varphi'(\alpha)} - S\dfrac{\varphi'(S)}{\varphi(S)}(1 - \dfrac{2}{\varphi'(\alpha)})) + \dfrac{\varphi''(S)}{\varphi'(S)}((2 - \varphi'(\alpha))\dfrac{\varphi(S)}{\varphi'(S)} - 2S)\ ]$
  $+ \ \mathcal{O}(\theta^3)$

Chapitre 4

A First Approach

4.1 Proof for the classic equation

In this section (see [4]) we will make some hypothesis to simplify the problem.

Hypothesis :

1. Let's fix the function φ as $\varphi = .^m$.
2. The fractionnal Laplacian is just a classic Laplacian : $-\mathcal{L} = \Delta$

So the PDE (3.1) becomes :

$$\begin{cases} \partial_t v = \Delta v^m + cv & in\ \mathbb{R}_+^* \times \Omega, \\ v(0,x) = u_0(x) & in\ \Omega, \\ v(t,x) = 0 & in\ \mathbb{R}_+^* \times\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

Where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is a bounded domain with smooth boundary, $m > 1$ and $c > 0$.

We suppose S a stationary solution of (4.1), which means :

$$\begin{cases} \Delta S^m + cS = 0 & in\ \Omega, \\ \partial_t S = 0 & in\ \Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

The goal is to evaluate the convergence rate of the solution v toward the stationnary state S. We need a good tool to measure this rate : we proceed with the following relative error.

$$\theta(t,x) = \frac{v(t,x)}{S(x)} - 1 \tag{4.3}$$

Let's proceed with the proof. First, we need to transform the PDE (4.1) to get an equation on θ.

PDE on the relative error

We have,

$$S\partial_t \frac{v}{S} = \Delta(\frac{v}{S}.S)^m + c\frac{v}{S}.S$$
$$S\partial_t \theta = \Delta[S^m(1+\theta)^m] + cS(1+\theta)$$

Using the formula (P1), we get :

$$S\partial_t \theta = (1+\theta)^m \Delta S^m + S^m \Delta(1+\theta)^m + 2\nabla S^m \cdot \nabla(1+\theta)^m + cS(1+\theta)$$

Using the formula (P2), we get :

$$S\partial_t\theta = \nabla\cdot[S^m\nabla(1+\theta)^m] + (1+\theta)^m\Delta S^m + \nabla S^m.\nabla(1+\theta)^m + cS(1+\theta)$$

Using the stationnary property (4.2),

$$S\partial_t\theta = \nabla\cdot[S^m\nabla(1+\theta)^m] - cS.(1+\theta)^m + \nabla S^m.\nabla(1+\theta)^m + cS(1+\theta)$$

Let $f(\theta) = 1+\theta-(1+\theta)^m$,

$$S\partial_t\theta = \nabla\cdot[S^m\nabla(1+\theta)^m] + \nabla S^m.\nabla(1+\theta)^m + cSf(\theta)$$

$$S^{m+1}\partial_t\theta = S^m\nabla\cdot[S^m\nabla(1+\theta)^m] + S^m\nabla S^m.\nabla(1+\theta)^m + cS^{m+1}f(\theta)$$

$$S^{m+1}\partial_t\theta = \nabla\cdot[S^{2m}\nabla(1+\theta)^m] + cS^{m+1}f(\theta)$$

Finally,

$$\partial_t\theta = \frac{1}{S^{m+1}}\nabla\cdot[S^{2m}\nabla(1+\theta)^m] + cf(\theta) \tag{4.4}$$

We are now going to prove a certain type of entropy inequalities.

Entropy function

We define the entropy function :

$$E[\theta(t)] := \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\theta(t,x)-\bar\theta\right|^2 S^{1+m}\,dx \tag{4.5}$$

where

$$\bar\theta(t) := \frac{\int_\Omega \theta(t,x)S^{1+m}\,dx}{\int_\Omega S^{1+m}\,dx} = \text{relative error to this sheaf}$$

and S is the chosen solution to the elliptic problem :

$$\begin{cases} -\Delta S^m = cS & \text{in } \Omega,\\ S>0 & \text{in } \Omega,\\ S=0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

We recall that the goal here will be to show the rate of convergence of the entropy function $E[\theta(t)]$ to 0 as $t\to 0$. To do so, we want to get an differential inequation on $E[\theta(t)]$ and then use the Gronwall Lemma on it.

Differentiation of the Entropy function

Uniform convergence in relative error holds as $t\to\infty$, that means $\epsilon(t) := \|\theta(t,\cdot)\|_\infty \to 0$.
First we notice that

$$\int_\Omega [\theta(t,x)-\bar\theta(t)]\,\partial_t\bar\theta\; S^{m+1}dx = \partial_t\bar\theta(t)\int_\Omega [\theta(t,x)-\bar\theta(t)]\; S^{m+1}dx = 0,$$

and also that

$$0 \le \int_\Omega [\theta(t,x)-\bar\theta(t)]^2\; S^{m+1}dx = \int_\Omega [\theta(t,x)^2-\bar\theta(t)^2]\; S^{m+1}dx$$

We next differentiate $E[\theta(t)]$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E[\theta(t)] &= \int_\Omega [\theta(t)-\bar{\theta}]\ \partial_t\theta S^{m+1}\,dx - \int_\Omega [\theta(t)-\bar{\theta}]\ \partial_t\bar{\theta} S^{m+1}\,dx \\ &= \int_\Omega [\theta(t)-\bar{\theta}]\ [S^{m+1}\partial_t\theta]\,dx \\ &= \int_\Omega [\theta(t)-\bar{\theta}]\ (\nabla\cdot[S^{2m}\nabla(1+\theta)^m] + cS^{m+1}f(\theta))\,dx \\ &= \int_\Omega [\theta(t)-\bar{\theta}]\ \nabla\cdot[S^{2m}\nabla(1+\theta)^m]dx + c\int_\Omega [\theta(t)-\bar{\theta}]f(\theta)\,S^{m+1}dx\end{aligned}$$

Using integration by parts,

$$\int_\Omega [\theta(t)-\bar{\theta}]\ \nabla\cdot[S^{2m}\nabla(1+\theta)^m]dx = \underbrace{\int_{\partial\Omega}[\theta(t)-\bar{\theta}].S^{2m}.\nabla(1+\theta)^m\,\vec{dn}_{\partial\Omega}}_{=0\ because\ S=0\ on\ \partial\Omega} - \int_\Omega \nabla[\theta(t)-\bar{\theta}]\cdot[S^{2m}\nabla(1+\theta)^m]dx$$

So,

$$\frac{d}{dt}E[\theta(t)] = \underbrace{-m\int_\Omega (1+\theta)^{m-1}\|\nabla\theta\|^2 S^{2m}dx}_{=\ (I)} + \underbrace{c\int_\Omega [\theta(t)-\bar{\theta}]f(\theta)\,S^{m+1}dx}_{=\ (II)}$$

Differential inequation

We also notice that for small $\theta-\bar{\theta}$ and we have :

$$f(\theta) = f(\bar{\theta}) + f'(\bar{\theta})(\theta-\bar{\theta}) + \frac{1}{2}f''(\tilde{\theta})(\theta-\bar{\theta})^2, \quad \text{with Rolle theorem}$$

where $\tilde{\theta}$ lies between θ and $\bar{\theta}$. We then have :

$$\begin{aligned}\frac{(II)}{c} &= \int_\Omega [f(\theta)-f(\bar{\theta})][\theta-\bar{\theta}]S^{m+1}\,dx + \underbrace{\int_\Omega f(\bar{\theta})[\theta-\bar{\theta}]\,S^{m+1}dx}_{=\ f(\bar{\theta})\int_\Omega[\theta-\bar{\theta}]\,S^{m+1}dx\ =\ 0} \\ &= f'(\bar{\theta})\int_\Omega [\theta-\bar{\theta}]^2\,S^{m+1}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega f''(\tilde{\theta})[\theta-\bar{\theta}]^3\,S^{m+1}dx \\ &= f'(\bar{\theta})\ 2E[\theta(t)] + \frac{1}{2}\int_\Omega f''(\tilde{\theta})[\theta-\bar{\theta}]^3\,S^{m+1}dx\end{aligned}$$

Now we use the fact that

$$f'(\bar{\theta}) \underset{t\to+\infty}{=} 1-m+m(1-m)\bar{\theta}+o(\bar{\theta}(t)) \ < 0 \text{ for t big enough}$$

$$f''(\tilde{\theta}) \underset{t\to+\infty}{\to} m(1-m) \ < 0$$

For t big enough,

$$\begin{aligned}
-\frac{(II)}{c} &= -f'(\bar{\theta})\ 2E[\theta(t)] - \frac{1}{2}\int_\Omega f''(\tilde{\theta})[\theta-\bar{\theta}]^3\, S^{m+1}dx \\
&\geq 2(m-1)\ E[\theta(t)] - \frac{1}{2}\int_\Omega f''(\tilde{\theta})[\theta-\bar{\theta}]^3\, S^{m+1}dx \\
&\geq 2(m-1)\ E[\theta(t)] + \frac{1}{2}\int_\Omega \underbrace{[-f''(\tilde{\theta})]}_{>0\ for\ t\ big}\ |\theta-\bar{\theta}|^2\ \underbrace{(\theta-\bar{\theta})}_{\geq -2\epsilon(t)} S^{m+1}dx \\
&\geq 2(m-1)\ E[\theta(t)] - \epsilon(t)\int_\Omega \underbrace{[-f''(\tilde{\theta})]}_{\leq m(m-1)+\delta,\ \delta>0}\ |\theta-\bar{\theta}|^2\ S^{m+1}dx \\
&\geq 2(m-1)\ E[\theta(t)] - \epsilon(t)\ [m(m-1)+\delta]\ 2E[\theta(t)] \\
&\geq -2[\ 1-m+(m(m-1)+\delta)\ \epsilon(t)\ ]\ E[\theta(t)]
\end{aligned}$$

So by minoring the second term (II), we finally get :

$$-\frac{d}{dt}E[\theta(t)] \geq m[1+\epsilon(t)]^{m-1}\int_\Omega |\nabla\theta|^2 S^{2m}\,dx - 2c[\ 1-m+(m(m-1)+\delta)\ \epsilon(t)\ ]\ E[\theta(t)]$$

Now, we need a Poincaré inequatlity for minoring the first term (I).

Using the Poincaré inequality (3.3), there exist $K>0$ such that

$$\int_\Omega S^{2m}|\nabla\theta|^2\,dx \geq Kc\int_\Omega S^{m+1}|\theta-\bar{\theta}|^2\,dx.$$

Main assumption : We now make an assumption :

$$Km - 2(1-m) \geq \lambda_0 > 0.$$

Putting these things together, we have obtained the desired differential inequation :

$$-\frac{d}{dt}E[\theta(t)] \geq c\ (\ Km[1-\epsilon(t)]^{m-1} - 2[1-m+(m(m-1)+\delta)\epsilon(t)]\ )\ E[\theta(t)] \tag{4.6}$$

Gronwall's Lemma

Finally, let's apply Gronwall's lemma :

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}E[\theta(t)] &\geq c\ (\ Km[1-\epsilon(t)]^{m-1} + 2(m-1) - 2m(m-1)\epsilon(t) - 2\delta\epsilon(t)\ )\ E[\theta(t)] \\
&\geq c\ (\ Km + 2(m-1) - [(K+2)m(m-1)+2\delta]\epsilon(t) + o(\epsilon(t))\ )\ E[\theta(t)],\ as\ t\to+\infty \\
&\geq c\ (\ Km + 2(m-1) - \delta')\ E[\theta(t)]\ \text{ for any }\ \delta'>0 \text{ and t large enough}
\end{aligned}$$

Then, with Gronwall,

$$\forall\beta < c(\ Km+2(m-1)),\ \exists\ t^*_{m,d,\beta},\ K>0|\ \forall t\leq t^*,\quad \boxed{E[\theta(t)] \leq E[\theta(t^*)]e^{-\beta(t-t^*)}} \tag{4.7}$$

This is the desired rate of convergence that controls the relative error. □

4.2 Proof for the generalised equation : an attempt

In this section, we do not fix the function φ anymore. The goal here is to generalise the previous proof (see [3]).

Hypothesis :

1. $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, bijective, $\varphi' > 0$, $\varphi(\pm\infty) = \pm\infty$ and $\varphi(0) = 0$
2. The fractionnal Laplacian is a classic Laplacian : $-\mathcal{L} = \Delta$

So the PDE (3.1) becomes :

$$\begin{cases} \partial_t v = \Delta\varphi(v) + cv & in\ \mathbb{R}_+^* \times \Omega, \\ v(0,x) = u_0(x) & in\ \Omega, \\ v(t,x) = 0 & in\ \mathbb{R}_+^* \times\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.8}$$

Where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is a bounded domain with smooth boundary and $c > 0$.
We suppose S a stationary solution of (4.8), which means :

$$\begin{cases} \Delta\varphi(S) + cS = 0 & in\ \Omega, \\ \partial_t S = 0 & in\ \Omega \end{cases} \tag{4.9}$$

The goal is to evaluate the convergence rate of the solution v toward the stationnary state S. To quantify the convergence, we will use a relative error. The relative error formula is different from the previous one. Otherwise, it would lead to impossible calculations. For more commodities, let's choose the Generalised Relative Error :

$$\theta(x,t) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(v(x,t))}{\varphi(S(x))}\right) - \alpha, \quad with\ \alpha = \varphi^{-1}(1) \tag{4.10}$$

Remark : The Generalised Relative Error coincide with the standard one when $\varphi = .^m$:

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(v)}{\varphi(S)}\right) - \alpha = \left(\frac{v^m}{S^m}\right)^{1/m} - 1^{1/m} = \frac{v}{S} - 1$$

Let's proceed with the proof. Like the previous section, we need to transform the PDE (4.8) to get an equation on θ.

PDE on the Generalised Relative Error

First,

$$\theta = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(v)}{\varphi(S)}\right) - \alpha \ \Leftrightarrow\ \varphi(\theta+\alpha) = \frac{\varphi(v)}{\varphi(S)} \ \Leftrightarrow\ \varphi(\theta+\alpha)\varphi(S) = \varphi(v)$$

So, the partial differential equation (4.8) becomes

$$\partial_t v = \Delta[\varphi(\theta+\alpha)\varphi(S)] + cv$$

Using the formula (P1), we get :

$$\partial_t v = \varphi(S)\Delta\varphi(\theta+\alpha) + \varphi(\theta+\alpha)\Delta\varphi(S) + 2\nabla\varphi(S)\cdot\nabla\varphi(\theta+\alpha) + cv$$

Using the stationary property,

$$\partial_t v = \varphi(S)\Delta\varphi(\theta+\alpha) - cS\varphi(\theta+\alpha) + 2\nabla\varphi(S)\cdot\nabla\varphi(\theta+\alpha) + cv$$

Using the formula (P3),

$$A\Delta B + 2\nabla A.\nabla B = \frac{1}{A} div(A^2 \nabla B)$$

We get :

$$\partial_t v = \frac{1}{\varphi(S)} div(\,\varphi(S)^2 \nabla\varphi(\theta+\alpha)\,) + c\,[v - S\varphi(\theta+\alpha)]$$

We should have an expression uniquely function of θ and S, so let's recall that

$$v = \varphi^{-1}[\varphi(\theta+\alpha)\varphi(S)]$$

Then, the equation becomes,

$$\frac{\varphi(S)^2\varphi'(\theta+\alpha)}{\varphi'[\varphi^{-1}(\varphi(\theta+\alpha)\varphi(S))]}\partial_t\theta = div(\,\varphi(S)^2\nabla\varphi(\theta+\alpha)\,) + c\,\varphi(S)[\varphi^{-1}(\varphi(\theta+\alpha)\varphi(S)) - S\varphi(\theta+\alpha)]$$

For more clarity, let's define

$$K_\varphi(\theta,S) := \frac{\varphi'[\varphi^{-1}(\varphi(\theta+\alpha)\varphi(S))]}{\varphi(S)^2\varphi'(\theta+\alpha)} \quad and \quad f_\varphi(\theta,S) := K_\varphi(\theta,S)\varphi(S)[\varphi^{-1}(\varphi(\theta+\alpha)\varphi(S)) - S\varphi(\theta+\alpha)]$$

then

$$\boxed{\partial_t\theta = K_\varphi(\theta,S)\, div(\,\varphi(S)^2\nabla\varphi(\theta+\alpha)\,) + c\, f_\varphi(\theta,S)} \tag{4.11}$$

Remark : This equation is exactly the generalisation of the one from the previous section :

$$"\partial_t\theta = \frac{1}{S^{m+1}}\nabla\cdot[S^{2m}\nabla(1+\theta)^m] + cf(\theta)"$$

Indeed,

$$K_{x\mapsto x^m}(\theta,S) = \frac{1}{S^{m+1}} \quad f_{x\mapsto x^m}(\theta,S) = f(\theta)$$

Entropy function and Weight

We define the entropy function :

$$E[\theta(t)] = \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\theta(t,x) - \bar\theta\right|^2 A_\varphi(S)\,dx \tag{4.12}$$

where we call $A_\varphi(S) > 0$ an unknown weight we should fix later. $A_\varphi(S)$ has to respect $A_{x\mapsto x^m}(S) = S^{m+1}$, in order to fit the previous case.
We set $d\mu = A_\varphi(S(x))dx$ for more simplicity.

$$\bar\theta(t) = \frac{\int_\Omega \theta(t,x)A_\varphi(S)\,dx}{\int_\Omega A_\varphi(S)\,dx} = \text{relative error to this sheaf}$$

and S is the chosen solution to the elliptic problem :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(S) = cS & \text{in } \Omega, \\ S > 0 & \text{in } \Omega, \\ S = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

We recall that the goal here will be to show the rate of convergence of the entropy function $E[\theta(t)]$ to 0 as $t \to 0$. To do so, we want to get a differential inequation on $E[\theta(t)]$ and then use the Gronwall Lemma on it.

Differentiation of entropy function

Uniform convergence in relative error holds as $t \to \infty$, that means $\epsilon(t) = \|\theta(t,\cdot)\|_\infty \to 0$.
First we notice that

$$\int_\Omega [\theta(t,x) - \bar{\theta}(t)]\, \partial_t \bar{\theta}\ d\mu = \partial_t \bar{\theta}(t) \int_\Omega [\theta(t,x) - \bar{\theta}(t)]\ d\mu = 0,$$

and also that

$$0 \leq \int_\Omega [\theta(t,x) - \bar{\theta}(t)]^2\ d\mu = \int_\Omega [\theta(t,x)^2 - \bar{\theta}(t)^2]\ d\mu$$

We next differentiate $E[\theta(t)]$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E[\theta(t)] &= \int_\Omega [\theta(t) - \bar{\theta}]\ \partial_t \theta d\mu - \underbrace{\int_\Omega [\theta(t) - \bar{\theta}]\ \partial_t \bar{\theta} d\mu}_{=0} \\ &= \underbrace{\int_\Omega [\theta(t) - \bar{\theta}]\ K_\varphi(\theta, S)\ div(\,\varphi(S)^2 \nabla \varphi(\theta + \alpha)\,) A_\varphi(S) dx}_{=(I)} + c \underbrace{\int_\Omega [\theta(t) - \bar{\theta}] f_\varphi(\theta, S)\, d\mu}_{=(II)}\end{aligned}$$

Using Integration By Parts,

$$(I) = \underbrace{\int_{\partial\Omega} [\theta(t) - \bar{\theta}]\ K_\varphi(\theta, S)\, \varphi(S)^2 A_\varphi(S)\, \vec{\nabla}\varphi(\theta + \alpha) \cdot \vec{dn}_{\partial\Omega}}_{=0\ because\ S=0\ on\ \partial\Omega} - \int_\Omega \nabla[\, K_\varphi(\theta, S) A_\varphi(S)(\theta(t) - \bar{\theta})] \cdot [\varphi(S)^2 \nabla\varphi(\theta + \alpha)] dx$$

Now, it is tempting to set $A_\varphi(S) \stackrel{?}{=} \frac{1}{K_\varphi(\theta,S)}$, for 2 reasons : the first one is that it simplifies the calculation in the nabla $\nabla[...]$. The second one is that it would be the perfect generalisation of the previous section since that :

$$\frac{1}{K_{\varphi = x \mapsto x^m}(\theta, S)} = S^{m+1}$$

However, it is impossible due to the fact that the weight $A_\varphi(S)$ cannot be θ-dependant !

For the moment let's keep the general notation $A_\varphi(S)$. Now, we continue the calculation using the general weight.

Calculations with general weight

$$\frac{d}{dt}E[\theta(t)] = (I) + c\,(II) \tag{4.13}$$

First we focus on (I) :

$$\begin{aligned}(I) &= -\int_\Omega \nabla[\, K_\varphi(\theta, S) A_\varphi(S)(\theta(t) - \bar{\theta})] \cdot [\varphi(S)^2 \nabla\varphi(\theta + \alpha)] dx \\ &= \underbrace{-\int_\Omega \|\nabla\theta\|^2\, \varphi'(v)\, A_\varphi(S)\ dx}_{(I)_1} \underbrace{- \int_\Omega [\theta(t) - \bar{\theta}]\, K_\varphi(\theta, S)\, \varphi(S)^2\, \varphi'(\theta + \alpha)\, \nabla A_\varphi(S) \cdot \nabla\theta\ dx}_{(I)_2} \\ &\qquad \underbrace{- \int_\Omega [\theta(t) - \bar{\theta}]\, A_\varphi(S)\, \varphi(S)^2\, \varphi'(\theta + \alpha)\, \nabla K_\varphi(\theta, S) \cdot \nabla\theta\ dx}_{(I)_3}\end{aligned}$$

First,

$$(I)_2 = -\int_\Omega [\theta(t) - \bar{\theta}]\, A'_\varphi(S)\, \varphi'(v)\, \nabla S \cdot \nabla\theta \; dx$$

Now, let's calculate the third term. For that let's find the expression of $\nabla K_\varphi(\theta, S)$
After derivation of the expression, we find :

$$\nabla K_\varphi(\theta, S) = \frac{\varphi(S)^2\varphi'(\theta+\alpha)\varphi''(v)\nabla v - 2\varphi'(v)\varphi'(\theta+\alpha)\varphi(S)\varphi'(S)\nabla S - \varphi'(v)\varphi(S)^2\varphi''(\theta+\alpha)\nabla\theta}{\varphi(S)^4\varphi'(\theta+\alpha)^2}$$

with

$$\nabla v = \frac{\varphi'(S)\varphi(\theta+\alpha)\nabla S + \varphi(S)\varphi'(\theta+\alpha)\nabla\theta}{\varphi'(v)}$$

We find the expression of $\varphi(S)^2\, \varphi'(\theta+\alpha)\, \nabla K_\varphi(\theta, S) \cdot \nabla\theta$:

$$\begin{aligned}\varphi(S)^2\, \varphi'(\theta+\alpha)\, \nabla K_\varphi(\theta, S) \cdot \nabla\theta = \nabla S \cdot \nabla\theta\, [\frac{\varphi''(v)\varphi(\theta+\alpha)}{\varphi'(v)} - 2\frac{\varphi'(v)}{\varphi(S)}]\, \varphi'(S) \\ + \|\nabla\theta\|^2\, [\frac{\varphi''(v)\varphi'(\theta+\alpha)\varphi(S)}{\varphi'(v)} - \frac{\varphi'(v)\varphi''(\theta+\alpha)}{\varphi'(\theta+\alpha)}]\end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned}(I)_3 = &-\int_\Omega [\theta(t) - \bar{\theta}]\, A_\varphi(S)\; \nabla S \cdot \nabla\theta\, [\frac{\varphi''(v)\varphi(\theta+\alpha)}{\varphi'(v)} - 2\frac{\varphi'(v)}{\varphi(S)}]\, \varphi'(S)\; dx \\ &-\int_\Omega [\theta(t) - \bar{\theta}]\, A_\varphi(S)\; \|\nabla\theta\|^2\, [\frac{\varphi'(v)\varphi'(\theta+\alpha)\varphi(S)}{\varphi'(v)} - \frac{\varphi'(v)\varphi''(\theta+\alpha)}{\varphi'(\theta+\alpha)}]\; dx\end{aligned}$$

Finally, we get the final general expression for any $A_\varphi(S)$:

$$\frac{d}{dt}E[\theta(t)] = \tag{4.14}$$

$$\text{terms involving } \|\nabla\theta\|^2 \quad \begin{cases} -\displaystyle\int_\Omega \|\nabla\theta\|^2\, \varphi'(v)\, A_\varphi(S)\, dx \\ -\displaystyle\int_\Omega [\theta(t) - \bar{\theta}]\; \|\nabla\theta\|^2\, [\frac{\varphi''(v)\varphi'(\theta+\alpha)\varphi(S)}{\varphi'(v)} - \frac{\varphi'(v)\varphi''(\theta+\alpha)}{\varphi'(\theta+\alpha)}]\; A_\varphi(S)\, dx \end{cases}$$

$$\text{terms involving } \nabla S \cdot \nabla\theta \quad \begin{cases} -\displaystyle\int_\Omega [\theta(t) - \bar{\theta}]\, \nabla S \cdot \nabla\theta\, [A_\varphi(S)\frac{\varphi'(S)\varphi''(v)\varphi(\theta+\alpha)}{\varphi'(v)} - 2A_\varphi(S)\frac{\varphi'(S)\varphi'(v)}{\varphi(S)} + A'_\varphi(S)\varphi'(v)]dx \\ \quad + c\displaystyle\int_\Omega [\theta(t) - \bar{\theta}] f_\varphi(\theta, S)\, A_\varphi(S)\; dx \end{cases}$$

Choice of the entropic Weight

Let's recall that the goal is to use the Gronwall lemma. This means that we want to minor $-\frac{d}{dt}E[\theta(t)]$ with something positive times $E[\theta(t)]$,

$$i.e. -\frac{d}{dt}E[\theta(t)] \geq [smth\ positive] \cdot E[\theta(t)]$$

We need first to simplify the expression of $\frac{d}{dt}E[\theta(t)]$, with the choice of a good weight. Let's recall that the weight $A_\varphi(S)$ must be such that :

1. $A_\varphi(S) > 0$
2. $A_{x\mapsto x^m}(S) = S^{m+1}$

There are different possible candidates, like $A_\varphi(S) = S\varphi(S)$ which is the most obvious one. However, this calculations does not seems to lead anywhere (I tried).

Another candidate is the following. Previously, I said that it was tempting to set $A_\varphi(S) \overset{?}{=} \frac{1}{K_\varphi(\theta,S)}$ because it cancels some terms in the nabla $\nabla[...]$, but it was not possible because $A_\varphi(S)$ cannot be $\theta - dependant$. Keeping the same idea, I will suggest to take the limit

$$\boxed{A_\varphi(S) = \lim_{\theta\to+0} \frac{1}{K_\varphi(\theta,S)} = \frac{\varphi'(\alpha)\varphi(S)^2}{\varphi'(S)}} \qquad \text{which indeed satisfies the 2 conditions.} \tag{4.15}$$

That choice should simply the calculations in the nabla $\nabla[...]$ asymptoticlally... To verify if it is the case, let's replace $A_\varphi(S)$ in the following expression :

$$[A_\varphi(S)\frac{\varphi'(S)\varphi''(v)\varphi(\theta+\alpha)}{\varphi'(v)} - 2A_\varphi(S)\frac{\varphi'(S)\varphi'(v)}{\varphi(S)} + A'_\varphi(S)\varphi'(v)]$$

$$= \frac{\varphi'(\alpha)\varphi(S)^2\varphi''(v)\varphi(\theta+\alpha)}{\varphi'(v)} - 2\varphi'(\alpha)\varphi(S)\varphi'(v) + 2\varphi(S)\varphi'(v)\varphi'(\alpha) - \frac{\varphi'(\alpha)\varphi'(v)\varphi''(S)\varphi(S)^2}{\varphi'(S)^2}$$

$$\underset{t\to+\infty}{\to} \frac{\varphi'(\alpha)\varphi(S)^2\varphi''(S)}{\varphi'(S)} - 2\varphi'(\alpha)\varphi(S)\varphi'(S) + 2\varphi(S)\varphi'(S)\varphi'(\alpha) - \frac{\varphi'(\alpha)\varphi'(S)\varphi''(S)\varphi(S)^2}{\varphi'(S)^2} = 0$$

So this choice seems to be a smart one. Now, let's replace $A_\varphi(S)$ in the expression. We get :

$$\frac{d}{dt}E[\theta(t)] = \tag{4.16}$$

$$-\int_\Omega \|\nabla\theta\|^2 \varphi'(v)\, d\mu$$

$$-\int_\Omega [\theta(t)-\bar\theta]\ \|\nabla\theta\|^2\ [\frac{\varphi''(v)\varphi'(\theta+\alpha)\varphi(S)}{\varphi'(v)} - \frac{\varphi'(v)\varphi''(\theta+\alpha)}{\varphi'(\theta+\alpha)}]\ d\mu$$

$$-\int_\Omega [\theta(t)-\bar\theta]\ \nabla S\cdot\nabla\theta\ \underbrace{[\frac{\varphi'(\alpha)\varphi(S)^2\varphi''(v)\varphi(\theta+\alpha)}{\varphi'(v)} - 2\varphi'(\alpha)\varphi(S)\varphi'(v) + 2\varphi(S)\varphi'(v)\varphi'(\alpha) - \frac{\varphi'(\alpha)\varphi'(v)\varphi''(S)\varphi(S)^2}{\varphi'(S)^2}]}_{\underset{t\to+\infty}{\to} 0}\ dx$$

$$+\ c\int_\Omega [\theta(t)-\bar\theta] f_\varphi(\theta,S)\, d\mu$$

4.3 Paths to explore

Now, the goal is to find an inequality of this type in order to apply Gronwall Lemma :

$$i.e. -\frac{d}{dt}E[\theta(t)] \geq [smth\ positive] \cdot E[\theta(t)]$$

However, I did not had the time in my internship to continue.

There are many path to explore in order to continue the proof :

— Making further assumption on φ and its derivatives in order to be able to minor each integral the way we want. For exemple, the assumption could be to make φ *close* to a power function(see [3]).

— Studying the asymptotic behaviour of the third integral could be useful, maybe to show that it is neglectable in regards of the others integrals...

— Adapting the general weighted Poincaré inequality to the generalised equation should also help to bound the integrals(see [4]).

— ...

Chapitre 5

An other Approach to the Problem

An other approach to the problem is to focus on the corresponding linearized equation.

5.1 Linearized problem with classic Laplacian

In this section we will make some hypothesis to simplify the problem.

Hypothesis :

1. $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, bijective, $\varphi' > 0$, $\varphi(\pm\infty) = \pm\infty$ and $\varphi(0) = 0$
2. The fractionnal Laplacian is a classic Laplacian : $-\mathcal{L} = \Delta$

We note $\psi = \varphi^{-1}$ for more commodities, and we make the next variable change :

$$\partial_t u = \Delta\varphi(u) + c\,u \;\Leftrightarrow\; \partial_t\psi(v) = \Delta v + c\,\psi(v)$$

So the PDE (3.1) becomes :

$$\begin{cases} \partial_t\psi(v) = \Delta v + c\,\psi(v) & in\ \mathbb{R}_+^* \times \Omega, \\ v(0,x) = u_0(x) & in\ \Omega, \\ v(t,x) = 0 & in\ \mathbb{R}_+^* \times\ \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

Now, S represent the stationnary solution of (5.1) :

$$\begin{cases} \Delta S = -c\psi(S) & in\ \Omega, \\ \partial_t S = 0 & in\ \Omega \end{cases} \tag{5.2}$$

and $v(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{L^\infty} S(x)$

For now, we want to linearize the PDE to simplify the problem (see [5]).

Linearization

Let $\mathcal{H}$, the operator that symbolize the equation (5.1) :

$$\mathcal{H} := \partial_t\psi(.) - \Delta. + c\,\psi(.)$$

(5.1) becomes $\mathcal{H}v = 0$. We also have $\mathcal{H}S = 0$

We linearize the operator $\mathcal{H}$ around the stationnary solution $S : v := S + w$

$$\mathcal{H}v = \mathcal{H}(S+w) = \partial_t\psi(S+w) - \Delta(S+w) - c\psi(S+w)$$

$$\psi(S+w) \underset{w\to 0}{=} \psi(S) + w\,\psi'(S) + w^2\,\epsilon(w), \quad \text{with } \epsilon(w) \text{ bounded.}$$

Then we find,

$$\mathcal{H}v \underset{w\to 0}{=} \mathcal{H}S + \psi'(S)\,\partial_t w - \Delta(w) - c\,\psi'(S)\,w + \textit{... non linear terms}$$

Cancelling the non-linerar terms, the linearized equation is :

$$\boxed{\partial_t w = c\,w + \frac{\Delta w}{\psi'(S)}} \quad (5.3)$$

New entropy function

Now let us define the linear Entropy functional $\mathcal{E}[w]$ and the linear Fisher information $\mathcal{I}[w]$ as follows :

$$\mathcal{E}[w] = \frac{1}{\psi'(1)}\int_\Omega w^2\,\psi'(S)\,dx, \quad \mathcal{I}[w] = \int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - \psi'(1)\,c\,\mathcal{E}[w]$$

Next, $\mathcal{E}[w]$ need to be differentiated in order to apply Gronwall, like before.

Differentiation

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{E}[w(t)] &= \frac{2}{\psi'(1)}\int_\Omega w\,\partial_t w\,\psi'(S)\,dx \\
&= \frac{2}{\psi'(1)}\int_\Omega w\,(\Delta w + c\,\psi'(S)\,w)\,dx \quad \text{replacing with (5.3)} \\
&= \frac{2}{\psi'(1)}\int_\Omega w\,\Delta w\,dx + 2c\,\mathcal{E}[w] \\
&= -\frac{2}{\psi'(1)}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx + 2c\,\mathcal{E}[w], \quad \text{using Intgration By Part.}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\mathcal{E}[w] = -\frac{2}{\psi'(1)}\mathcal{I}[w] \quad (5.4)$$

Gronwall's Lemma

Now, we make the assumption of Poincaré Hypothesis (See section 3.2). This Poincaré inequality has been already used in [4] for the case $\psi = .^p$.
We will assume that for any "good" ψ , $\exists\lambda_\psi > 0 \mid \ \lambda_\psi\,\mathcal{E}[w] \le \mathcal{I}[w]$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\mathcal{E}[w] \le -\frac{2\lambda_\psi}{\psi'(1)}\mathcal{E}[w](t)$$

With Gronwall lemma,

$$\boxed{\mathcal{E}[w(t)] \le e^{-\frac{2\lambda_\psi}{\psi'(1)}t}\,\mathcal{E}[w_0]} \quad (5.5)$$

□

5.2 Linearized problem with fractionnal Laplacian)

In this section, we will attempt the same type of proof, but with the fractionnal Laplacian and some other hypthesis.

Hypothesis :

1. Specific case of $\varphi = .^m$
2. The fractionnal Laplacian is set to the fractionnal power $1/2$: $-\mathcal{L} = -(-\Delta)^{1/2}$

We note $p = \frac{1}{m}$ for more commodities, and we make the next variable change like in the previou section. So the PDE (3.1) becomes :

$$\begin{cases} \partial_t v^p = -(-\Delta)^{1/2} v + c\, v^p & in\ \mathbb{R}_+^* \times \Omega, \\ v(0,x) = u_0(x) & in\ \Omega, \\ v(t,x) = 0 & in\ \mathbb{R}_+^* \times\ \partial\Omega \end{cases} \tag{5.6}$$

Now, S represent the stationnary solution of (5.6) :

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2} S = c\, S^p & in\ \Omega, \\ \partial_t S = 0 & in\ \Omega \end{cases} \tag{5.7}$$

and $v(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{L^\infty} S(x)$

Linearization

The linearized equation in that case is the folowing (same process than the previous section) :

$$\boxed{\partial_t w = c\, w - \frac{\mathcal{L}(w)}{p S^{p-1}}} \tag{5.8}$$

where $\mathcal{L}(.) = (-\Delta)^{1/2}(.)$

Entropy and differentiation

$$\mathcal{E}[w] = \int_\Omega w^2\, S^{p-1}\, dx, \quad \mathcal{I}[w] = \int_\Omega |\nabla w|^2\, dx - p\, c\, \mathcal{E}[w]$$

The case is similar to the previous one up to the Integration by Bart step !

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}[w(t)] = ... = -\frac{2}{p}\int_\Omega w\, \mathcal{L}(w)\, dx + 2c\, \mathcal{E}[w] = ?$$

So we need to estimate this integral :

$$\int_\Omega w\, \mathcal{L}(w)\, dx \quad = \quad ?$$

Like in [3], we extend the function $w(t,x)$ to a function $\hat{w}(t,x,y)$ defined for (x,y) in $\Omega\times\mathbb{R}_+$, such that :

$$\begin{cases} \hat{w}=0 & \text{on } \Omega^c\times\{y=0\},\\ \Delta\hat{w}=0 & \text{in } \mathbb{R}_+\times\Omega\times\mathbb{R}_+,\\ \partial_t w = c\,w - \frac{\partial_y\hat{w}}{pS^{p-1}} & \text{in } \mathbb{R}_+\times\Omega. \end{cases} \tag{5.9}$$

We have the following property (see [2]) :

$$\partial_y\hat{w}(t,x,y)_{|y=0} = -\mathcal{L}(w)(t,x) \tag{5.10}$$

Then,

$$\begin{aligned} \int_\Omega w\,\mathcal{L}(w)\,dx &= -\int_\Omega \hat{w}(t,x,y)_{|y=0}\ \partial_y\hat{w}(t,x,y)_{|y=0}\ dx\\ &= \int_{\Omega\times\mathbb{R}^+}\hat{w}(t,x,y)\ \Delta\hat{w}\,dx\,dy\ +\ \int_{\Omega\times\mathbb{R}^+}\|\nabla\hat{w}\|^2\,dx\,dy\\ &= \int_{\Omega\times\mathbb{R}^+}\|\nabla\hat{w}\|^2\,dx\,dy \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}[w(t)] = -\frac{2}{p}\int_{\Omega\times\mathbb{R}^+}\|\nabla\hat{w}\|^2\,dx\,dy + 2c\,\mathcal{E}[w]$$

In order to use Gronwall Lemma, a way to link (5.11) with $\mathcal{I}[w]$ must be found.

Troisième partie

Analyse du Stage

Chapitre 6

Organisation

Outils d'organisation

Dans le cadre de mon stage, l'organisation se reposait beaucoup sur des outils collaboratifs.

Dropbox était utilisé entre les différents chercheurs pour mettre en commun les publications avec le code LaTeX associé, permettant ainsi une centralisation des données et des documents pertinents. J'ai rédigé mon travail sur Overleaf, plateforme collaborative couramment employée pour la rédaction en LaTeX et pour générer des pdf. Ce rapport a été créé sur Overleaf. J'ai eu aussi l'occasion d'utiliser la base de données qui regroupe les publications de l'université, accessible à tous les chercheurs.

La communication avec mon tuteur se faisait par mail ou en présentiel. Ces outils ont facilité non seulement la documentation et le suivi de mon travail, mais aussi la révision et le retour de mon tuteur. Mon organisation personnelle s'effectuait avec mon agenda.

Ressources

Les ressources utilisées pour le projet étaient variées. J'ai pu m'appuyer sur des publications rédigées par mon tuteur ainsi que sur des travaux d'autres chercheurs. Les échanges réguliers avec mon tuteur et d'autres mathématiciens du laboratoire ont également été essentiels pour approfondir ma compréhension du sujet. J'ai eu l'opportunité de dialoguer avec des doctorants et des étudiants en master, chacun spécialisé dans un domaine précis, ce qui m'a permis de bénéficier d'expertises complémentaires.

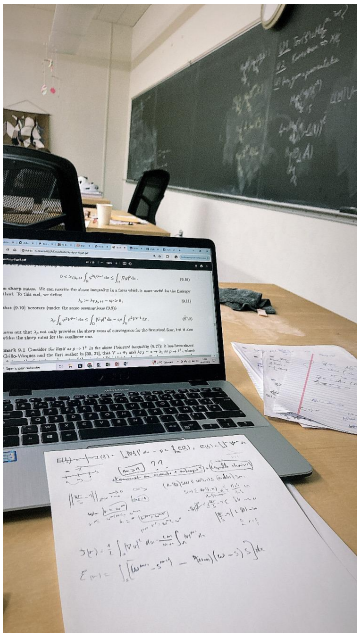
J'ai également consulté des articles en cours de rédaction, encore non publiés, ainsi que des ressources en ligne. J'ai assisté à des cours universitaires et à des séminaires hebdomadaires, enrichissant ainsi ma culture scientifique. Je suis parfois revenu sur mes anciens cours de prépa.

Enfin, les ressources matérielles, telles que mon bureau, le tableau à craie et les locaux mis à disposition, ont contribué à un environnement de travail propice à la recherche.

Activités quotidiennes

Voici comment s'organisaient mes activités quotidiennes de recherche.

— Tout d'abord, je m'assurais de bien comprendre ce que je devais démontrer.
— Ensuite, je consacrais du temps à la lecture de publications pertinentes prescrites par mon tuteur.
— Une fois cette phase de documentation achevée, je passais à l'étape de travail au brouillon, où je tentais de combiner les ressources des lectures, d'explorer les différentes pistes etc...
— Ensuite, j'écrivais mes idées au propre afin d'être en mesure de les présenter à mon tuteur.
— Chaque semaine, nous avions un ou deux entretiens, au cours desquels mon tuteur m'apportait ses retours.
— Lorsque mon travail était validé par mon tuteur, je passais à la rédaction formelle en LaTeX.
— Ce cycle se répétait, chaque itération m'apportant un approfondissement progressif du sujet et un renforcement de mes compétences en rédaction scientifique.



Mon bureau

Chapitre 7

Compétences Développées à travers les contraintes du projet

Ce stage m'a permis de développer et de renforcer de nombreuses compétences. Elles sont : gestion des priorités et du temps, communication, scientifiques et techniques.

Prioriser

Tout d'abord, il fallait savoir se concentrer sur ce que l'on veut prouver sans se laisser distraire par d'autres problèmes qui surgissent au cours des recherches. Cette capacité est indispensable pour ne pas être détourné par des questions secondaires et agir en vue de l'objectif uniquement.

Gestion du temps

Sur le plan temporel, les contraintes étaient également marquantes : en 5,5 mois, il ne s'agissait pas seulement chercher, mais aussi de prendre le temps de lire des publications et de formaliser le tout en LaTeX.

J'ai également compris qu'il est impossible de tout maîtriser ou de tout approfondir en un temps aussi court. Cela m'a appris à accepter mes limites et à admettre les résultats d'autres chercheurs, sans tout comprendre. Cela exige une part de confiance dans le travail des autres. J'ai ainsi acquis des compétences précieuses en gestion du temps.

Communication

J'ai aussi considérablement progressé en matière de communication, notamment en anglais qui était la langue que je parlais tous les jours. Au cours des deux premiers mois, je devais souvent faire répéter mon interlocuteur lors des conversations car je n'étais pas habitué à leur fort accent américain. Par la suite, c'est devenu complètement naturel.

Johns Hopkins University est une université avec des gens de cultures différentes provenant du monde entiers : américains, chinois, indiens, italiens turcs etc... J'ai été exposé à cette diversité culturelle mais j'ai surtout découvert la culture américaine de la côte Est.

Hard Skills

Enfin, sur le plan des compétences scientifiques et techniques, je sais désormais coder en LateX. En plus de mon niveau linguistique global, je comprends désormais le vocabulaire mathématiques en anglais et je peux exprimer des idées abstraites. Enfin, mon niveau de maths et notamment dans les Equations aux Dérivées Partielles et Analyse a augmenté et ma culture mathématique aussi.



Aux Etats-Unis, la cérémonie des diplômes est culturellement un moment très important

Chapitre 8

Retour d'Expérience et Apport Personnel

Vision stratégique de la structure d'accueil

J'ai pu observer que les chercheurs ont une vision orientée *théorie* très complémentaire avec mon esprit d'ingénieur. C'est de la recherche fondamentale : les potentielles applications sont perçues comme secondaire. Ils sont très passionnés par ce qu'ils font au quotidien.

Le laboratoire a une vision stratégique axée sur la communication et l'entraide. Cette approche encourage la collaboration entre professeurs, étudiants et doctorants, ainsi qu'avec d'autres laboratoires. En effet, le laboratoire accueillait régulièrement des visiteurs venant d'autres états des États-Unis, voire de l'étranger, pour partager des connaissances, cohésionner, faire des séminaires etc...

J'ai eu l'occasion de discuter avec eux et d'en appendre toujours plus sur leur métier et leurs motivations. Souvent, des rencontres sont organisées par la structure après les séminaires hebdomadaires, comme des sorties au restaurant chaque Lundi, favorisant une dynamique d'équipe.

Apport personnel

Le projet que j'ai repris était en pause, mais il avait déjà bénéficié des réflexions de plusieurs chercheurs travaillant ensemble. J'ai pu m'approprier le sujet, ce qui m'a permis de synthétiser le problème à travers mon rapport et de proposer de nouvelles orientations pour les futures directions à prendre. J'ai avancé les calculs et la démonstration en suivant ces nouvelles pistes.

Certaines des directions mathématiques que j'ai explorées n'ont pas abouti, mais elles serviront aux futures recherches en évitant de reproduire les mêmes erreurs. D'autres pistes semblent en revanche prometteuses et pourraient contribuer à des avancées sur cette problématique.

Réussite de la mission

L'objectif initial que je m'étais fixé a été atteint : j'ai su m'approprier le sujet, m'impliquer dans la recherche, et échanger avec des experts pour enrichir mes perspectives. De plus, j'ai apporté ma propre vision au projet, en prenant des initiatives mathématiques : par exemple le choix du poids dans l'intégrale d'entropie.

Conclusions

Voici les principales conclusions que j'ai tiré de ce projet. J'ai réalisé l'importance de faire confiance aux experts pour gagner du temps. Face à des domaines nécessitant des connaissances pointues, se reposer sur l'expertise de chercheurs expérimentés est obligatoire.

Ensuite, j'ai pris conscience de l'importance de connaître mes propres limites. Admettre que je ne peux pas maîtriser tous les aspects d'un sujet permet de mieux concentrer mes efforts sur les points essentiels.

Enfin, j'ai compris qu'il est crucial de savoir communiquer afin d'avoir un feed-back régulier sur son travail, mais aussi à l'échelle du département pour partager les connaissances.

Cette expérience, que je continue en recherche ou non , me sera utile dans ma vie professionnelle de par les compétences développées et l'ouverture d'esprit qu'elle m'a apportée.

Bibliographie

[1] Vázquez, J. L. (2010). *The mathematical theories of diffusion : Nonlinear and fractional diffusion*. Department of Mathematics, Universidad Autónoma de Madrid, https ://arxiv.org/abs/1706.08241

[2] Bonforte, M., Sire, Y., Vázquez, J. L. (2014). *Existence, Uniqueness and Asymptotic behaviour for fractional porous medium equations on bounded domains*, https ://arxiv.org/abs/1404.6195

[3] Bonforte, M., Sire, Y. *Entropy methods for nonlocal filtration equations in bounded domains.*

[4] Bonforte, M., Grillo, G., Vázquez, J. L. (2011). *Behaviour near extinction for the Fast Diffusion Equation on bounded domains*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. https ://doi.org/10.1016/j.matpur.2011.03.002

[5] Bonforte, M., Figalli, A. (2022). *The Cauchy-Dirichlet Problem for the Fast Diffusion Equation on Bounded Domains.*